

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Segundo Semestre de 2015

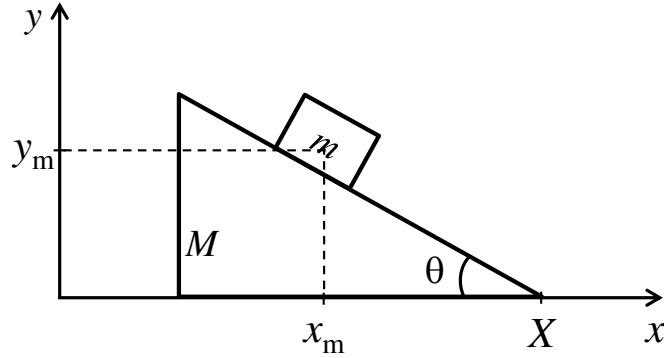
Mecânica Clássica

14/08/2015 - 9h às 12h

(Escolha três dentre as quatro questões.)

QUESTÃO 1: Formalismos Newtoniano e Lagrangeano

Um bloco de massa m , inicialmente em repouso, desliza sem atrito sobre uma cunha de massa M que forma um ângulo θ com a horizontal, como mostrado na figura. A cunha, inicialmente em repouso, desliza sem atrito sobre uma superfície horizontal.



As coordenadas do bloco são (x_m, y_m) e a posição horizontal da cunha pode ser determinada pela coordenada X .

a) (40%) Utilizando as leis de Newton e a equação de vínculo das coordenadas do sistema, determine as equações de movimento do bloco e da cunha em termos de m , M e θ . Mostre que, quando $M \rightarrow \infty$, o seu resultado se reduz ao de um bloco de massa m deslizando num plano inclinado fixo.

b) (30%) Utilizando o formalismo Lagrangeano determine as equações de movimento do bloco e da cunha em termos de m , M e θ (sem resolvê-las).

c) (30%) Resolva as equações de Euler-Lagrange e mostre que o resultado é o mesmo obtido utilizando as leis de Newton

QUESTÃO 2: Força Central

Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central cujo potencial é dado por $V(r)$, onde r é a distância da partícula à origem do sistema de coordenadas.

a) (40%) Mostre que o momento angular da partícula em relação à origem é conservado e escreva a energia mecânica do sistema em função de uma única variável dinâmica r . Defina um potencial efetivo V_{ef} e escreva a equação de movimento de r em termos de V_{ef} (não é necessário resolvê-la).

b) (30%) Considere que o potencial $V(r)$ gera uma força de Yukawa dada por

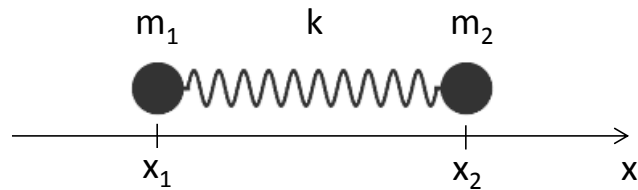
$$\vec{F} = -\frac{K e^{-r/r_0}}{r^2} \hat{r},$$

onde K e r_0 são constantes positivas. Determine o momento angular da partícula em relação à origem para que a mesma percorra uma órbita circular de raio R . Utilizando este resultado, obtenha a condição que r_0 deve obedecer para que a órbita seja estável.

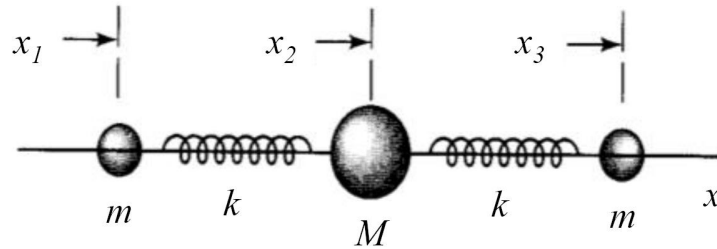
c) (30%) Se a partícula sofre uma pequena perturbação de sua órbita circular, qual é o período de pequenas oscilações em torno de $r = R$? Considere $r(t) = R + \eta(t)$, onde $\eta(t) \ll R$, e $\phi(t)$ é o ângulo em coordenadas polares ao longo do plano definido pela órbita da partícula. Determine $r(t)$ e $\phi(t)$ supondo $r(0) = R + \eta_0$, $\dot{r}(0) = 0$ e $\phi(0) = \phi_0$ (expresse a solução de $\phi(t)$ em termos de uma integral no tempo).

QUESTÃO 3: Pequenas Oscilações

a) (30%) Sejam duas massas m_1 e m_2 ligadas entre si por uma mola de constante elástica k cujo comprimento de repouso é L . Determine as frequências e os modos de vibração deste sistema. Se este sistema for uma molécula diatômica do tipo CO , onde $m_C \approx m_O \approx 2 \times 10^{-26} kg$ e $k = 10^4 N/m$, mostre que uma das frequências de oscilação possui comprimento de onda em torno de $2 \mu m$. Considere $\pi = 3$.



b) Considere duas massas m conectadas a uma massa M por duas molas de mesma constante elástica k . Suponha que o movimento ocorre ao longo do eixo x e x_1 , x_2 e x_3 indicam os deslocamentos das massas em relação às posições de equilíbrio, como mostrado na figura.



i) (10%) Descreva qualitativamente os possíveis modos de vibração deste sistema desenhando o sentido do movimento relativo das massas para cada modo.

ii) (30%) Escreva a Lagrangeana do sistema e obtenha as equações de movimento para cada massa.

iii) (30%) Determine as frequências de vibração e determine os seus respectivos modos de vibração.

QUESTÃO 4: Transformações Canônicas

Considere um movimento unidimensional de uma partícula com coordenada generalizada q , cuja Lagrangeana é dada por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{q}^2}{q^4} - \frac{1}{q^2} \right).$$

a) (20%) Obtenha a Hamiltoniana do sistema $H(q, p)$ em termos da coordenada q e de seu momento canonicamente conjugado p .

b) (30%) Utilizando a função geradora do primeiro tipo $F_1(q, Q) = -Q/q$, obtenha a transformação $Q = pq^2$ e $P = 1/q$, onde Q e P representam respectivamente a coordenada e o momento transformados. Verifique que essa transformação é canônica.

c) (30%) Calcule a Hamiltoniana transformada $K = K(Q, P)$ e resolva as equações de Hamilton de movimento para a coordenada $Q = Q(t)$ e momento $P = P(t)$. Considere as seguintes condições iniciais: $Q(0) = 1$ e $P(0) = 0$.

d) (20%) De posse dos resultados anteriores, calcule a expressão para $q = q(t)$ e $p = p(t)$. Verifique explicitamente que essa solução satisfaz à equação de Hamilton para $H(q, p)$.